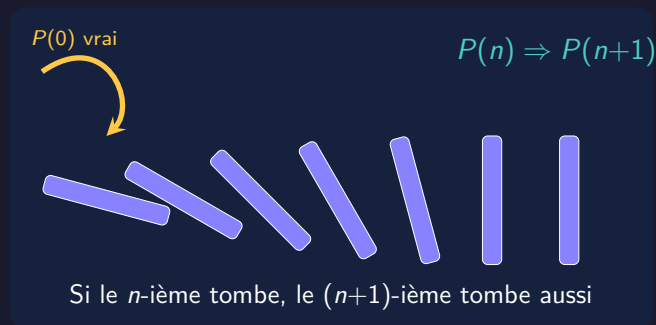


Suites : Récurrence & Limites








Raisonnement par récurrence ■ Convergence ■ Théorèmes de limites



Terminale — Spécialité Mathématiques — Programme officiel



Table des matières

1	 Pourquoi étudier les suites et la récurrence ?	3
1.1	De quoi parle-t-on ?	3
1.2	Les applications	3
1.3	L'idée directrice	3
2	 L'idée avant la formule	4
2.1	Le principe des dominos	4
2.2	Pourquoi a-t-on besoin de la récurrence ?	4
2.3	La convergence : vers où va la suite ?	4
3	 Le cours formel	5
3.1	Rappels : suites arithmétiques et géométriques	5
3.2	Raisonnement par récurrence	6
3.3	Notion de limite d'une suite	8
3.4	Opérations sur les limites	10
3.5	Limites de référence et croissances comparées	12
3.6	Théorèmes de comparaison	14
3.7	Théorème de convergence monotone	15
3.8	Suites adjacentes (complément)	16
3.9	Suites et fonctions continues	17
3.10	Algorithme : calcul de termes et recherche de seuil	18
4	 Boîte à outils	19
5	 Exercices	21
6	 Problème — La suite de Babylone et les approximations de \sqrt{a} ★★ ★	23
7	 Corrigés détaillés	24

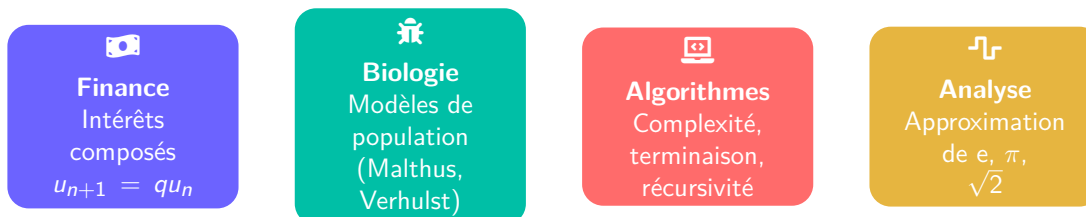
1 ? Pourquoi étudier les suites et la récurrence ?

1.1 De quoi parle-t-on ?

Une **suite** est une liste infinie de nombres, indicée par $n \in \mathbb{N}$: u_0, u_1, u_2, \dots . En Première, on a découvert les suites arithmétiques et géométriques. En Terminale, on va beaucoup plus loin :

- Le **raisonnement par récurrence** : un outil de démonstration universel.
- La **convergence** : vers quelle valeur tend u_n quand $n \rightarrow +\infty$?
- Les **théorèmes de comparaison** : encadrer, comparer, conclure.

1.2 Les applications



1.3 L'idée directrice

L'idée directrice :

La récurrence est le **principe des dominos** : si le premier tombe, et si chaque domino entraîne le suivant, alors **tous** tombent. Les limites de suites répondent à la question : **vers où va la suite ?** Les théorèmes de convergence donnent des outils rigoureux pour répondre.

2 L'idée avant la formule

2.1 Le principe des dominos

Intuition | La récurrence, c'est les dominos

Imagine une file infinie de dominos numérotés $0, 1, 2, 3, \dots$

Pour que tous les dominos tombent, il suffit de deux choses :

1. Pousser le premier domino (domino 0 tombe). C'est l'**initialisation**.

2. Vérifier que chaque domino entraîne le suivant : si le domino n tombe, alors le domino $n+1$ tombe aussi. C'est l'**hérédité**.

Conclusion : tous les dominos tombent. La propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.2 Pourquoi a-t-on besoin de la récurrence ?

Intuition | On ne peut pas vérifier l'infini un par un

Certaines propriétés sont vraies pour **tout** entier n . Comment le démontrer ? On ne peut pas vérifier pour $n = 0$, puis $n = 1$, puis $n = 2$, etc. à l'infini. La récurrence permet de **réduire l'infini à deux étapes finies**.

Par exemple : « $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ». On ne peut pas vérifier pour chaque n . Mais on peut montrer que c'est vrai pour $n = 0$, et que si c'est vrai pour un n , alors c'est vrai pour $n+1$.

2.3 La convergence : vers où va la suite ?

Intuition | L'idée de limite

Considérons $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$:

n	1	10	100	1000	10^6	$\rightarrow +\infty$
u_n	2	1,1	1,01	1,001	1,000001	$\rightarrow 1$

Les termes se rapprochent de plus en plus de 1. On dit que la suite **converge** vers 1, et on écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Attention : la suite ne vaut **jamais** exactement 1. Elle s'en approche **autant qu'on veut**.

3 Le cours formel

3.1 Rappels : suites arithmétiques et géométriques

✓ Propriété | Suite arithmétique de raison r

$u_{n+1} = u_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Terme général : $u_n = u_0 + nr$. Somme : $\sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$.

Si $r > 0$: croissante. Si $r < 0$: décroissante. Si $r = 0$: constante.

Limite : $+\infty$ si $r > 0$, $-\infty$ si $r < 0$, u_0 si $r = 0$.

✓ Propriété | Suite géométrique de raison $q > 0$

$u_{n+1} = q \cdot u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Terme général : $u_n = u_0 \cdot q^n$. Somme : $\sum_{k=0}^n u_0 q^k = u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ si $q \neq 1$.

Valeur de q	$0 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
Monotonie	Décroissante	Constante	Croissante
$\lim q^n$	0	1	$+\infty$

Démonstration | Formule de la somme géométrique — exigible

Soit $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$. Multiplions par q :

$$qS = q + q^2 + \dots + q^{n+1}.$$

Soustrayons : $S - qS = 1 - q^{n+1}$, d'où $S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$ et $S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ pour $q \neq 1$.

Ce raisonnement est un **classique du bac**. La technique : multiplier par la raison et soustraire.

✓ Propriété | Suite arithmético-géométrique — méthode complète

$u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 1$.

Étape 1 : trouver le **point fixe** ℓ en résolvant $\ell = a\ell + b$, soit $\ell = \frac{b}{1-a}$.

Étape 2 : poser $v_n = u_n - \ell$. Montrer que (v_n) est géométrique :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \ell = (au_n + b) - (a\ell + b) = a(u_n - \ell) = a \cdot v_n.$$

Étape 3 : $v_n = v_0 \cdot a^n = (u_0 - \ell) \cdot a^n$, donc :

$$u_n = \ell + (u_0 - \ell) \cdot a^n$$

Étape 4 : Si $|a| < 1$: $a^n \rightarrow 0$, donc $\lim u_n = \ell$. Si $|a| > 1$: divergence.

Exemple | $u_0 = 5$, $u_{n+1} = 0,7 u_n + 6$

Point fixe : $\ell = \frac{6}{1-0,7} = \frac{6}{0,3} = 20$.

$v_n = u_n - 20$. $v_0 = 5 - 20 = -15$. $v_n = -15 \times 0,7^n$.

$u_n = 20 - 15 \times 0,7^n$. Comme $|0,7| < 1$: $\lim u_n = 20$.

Vérification : $u_0 = 5$, $u_1 = 9,5$, $u_2 = 12,65$, $u_3 = 14,855 \dots \rightarrow 20$. ✓

3.2 Raisonnement par récurrence

★ Théorème | Principe de récurrence — axiome fondamental

Soit $P(n)$ une propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$. Si :

1. **Initialisation** : $P(n_0)$ est vraie (pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$).
2. **Hérédité** : pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

🧠 Intuition | Pourquoi ça marche ?

Grâce à l'initialisation, $P(n_0)$ est vraie. L'hérédité dit que $P(n_0) \Rightarrow P(n_0+1)$, donc $P(n_0+1)$ est vraie. Puis $P(n_0+1) \Rightarrow P(n_0+2)$, donc $P(n_0+2)$ est vraie. Et ainsi de suite, à l'infini. L'hérédité est le **mécanisme de propagation** ; l'initialisation est le **déclencheur**.

🔧 Méthode | Rédiger une récurrence en 4 étapes — modèle de rédaction

Étape 1 — Poser. « Montrons par récurrence que pour tout $n \geq n_0$, $P(n) : \dots$ »

Étape 2 — Initialisation. « Pour $n = n_0$: [calcul du côté gauche] = [calcul du côté droit]. Donc $P(n_0)$ est vraie. »

Étape 3 — Hérédité. « Soit $n \geq n_0$ fixé. **Supposons que $P(n)$ est vraie** (hypothèse de récurrence). Montrons que $P(n+1)$ est vraie. »

(C'est ici que se fait le vrai travail : on utilise le fait que $P(n)$ est vraie pour en déduire $P(n+1)$.)
« ...donc $P(n+1)$ est vraie. »

Étape 4 — Conclusion. « Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. »

⚠ Attention | Les 5 erreurs fatales de rédaction

1. **Oublier l'initialisation.** Sans elle, rien ne démarre. Exemple : « pour tout $n \geq 0$, $0 > 1$ » — l'hérédité est vacuellement vraie ($P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vrai si $P(n)$ est faux !), mais l'initialisation échoue.
2. **Ne pas énoncer clairement $P(n)$.** Le correcteur doit voir exactement ce qu'on prouve.
3. **Prouver $P(n+1)$ sans utiliser $P(n)$.** Ce n'est alors pas une récurrence, c'est une preuve directe.
4. **Écrire « supposons $P(n)$ vraie pour tout n ».** On suppose $P(n)$ pour **un** n fixé.
5. **Confondre n et $n+1$ dans les indices.** Bien remplacer partout n par $n+1$ dans $P(n+1)$.

💡 Exemple | Exemple 1 — Somme : $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$

Propriété $P(n)$: $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$.

Initialisation ($n = 0$) : $\sum_{k=0}^0 2^k = 2^0 = 1$ et $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$. Donc $P(0)$ est vraie. ✓

Hérédité : Soit $n \geq 0$ fixé. Supposons $P(n)$ vraie : $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$.

Calculons le côté gauche de $P(n+1)$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^k = \underbrace{\sum_{k=0}^n 2^k}_{\text{c'est } P(n)} + 2^{n+1} = \underbrace{2^{n+1} - 1}_{\text{par hyp. réc.}} + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1.$$

Or, le côté droit de $P(n+1)$ est $2^{(n+1)+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$. Égalité vérifiée : $P(n+1)$ est vraie. ✓

Conclusion : par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

💡 Exemple | Exemple 2 — Encadrement d'une suite récurrente

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Montrons que $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$P(n)$: $0 \leq u_n \leq 2$.

Initialisation : $u_0 = 1$ et $0 \leq 1 \leq 2$. $P(0)$ vraie. ✓

Hérédité : Soit $n \geq 0$, supposons $0 \leq u_n \leq 2$.

On a alors $2 \leq u_n + 2 \leq 4$ (on ajoute 2 partout).

En prenant la racine (fonction croissante) : $\sqrt{2} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{4}$, i.e. $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2$.

Comme $\sqrt{2} \geq 0$, on a bien $0 \leq u_{n+1} \leq 2$. $P(n+1)$ vraie. ✓

Conclusion : $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : on a même montré que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour $n \geq 1$ (encadrement plus précis).

💡 Exemple | Exemple 3 — Inégalité de Bernoulli (classique)

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \geq -1$: $(1+x)^n \geq 1+nx$.

$P(n)$: $(1+x)^n \geq 1+nx$ pour tout $x \geq -1$.

Init ($n=0$) : $(1+x)^0 = 1$ et $1+0 \cdot x = 1$. Donc $1 \geq 1$. $P(0)$ vraie. ✓

Hér. : Supposons $(1+x)^n \geq 1+nx$ pour tout $x \geq -1$.

$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot \underbrace{(1+x)}_{\geq 0} \geq (1+nx)(1+x)$ (on multiplie l'inégalité $P(n)$ par $1+x \geq 0$).

$(1+nx)(1+x) = 1+x+nx+nx^2 = 1+(n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x$.

Donc $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$. $P(n+1)$ vraie. ✓

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq -1$: $(1+x)^n \geq 1+nx$.

💡 Exemple | Exemple 4 — Récurrence pour la monotonie

Soit $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Montrons que (u_n) est croissante.

$P(n)$: $u_{n+1} \geq u_n$.

Init ($n=0$) : $u_1 = \sqrt{1+2} = \sqrt{3} \approx 1,73 \geq 1 = u_0$. $P(0)$ vraie. ✓

Hér. : Supposons $u_{n+1} \geq u_n$. Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x+2}$ est **croissante** :

$u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} + 2} \geq \sqrt{u_n + 2} = u_{n+1}$.

Donc $u_{n+2} \geq u_{n+1}$, i.e. $P(n+1)$ vraie. ✓

Conclusion : (u_n) est croissante.

Astuce : quand on veut montrer la monotonie d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$, on utilise souvent le fait que f est croissante.

✓ Propriété | Variantes de la récurrence

Récurrence à partir de $n_0 \neq 0$: on initialise à n_0 (par ex. $n_0 = 1$ ou $n_0 = 2$). Conclusion : $P(n)$ pour tout $n \geq n_0$.

Récurrence forte (ou complète) : au lieu de supposer seulement $P(n)$, on suppose $P(k)$ **pour tout** $k \leq n$, et on montre $P(n+1)$. Utile pour les suites d'ordre 2 (comme Fibonacci) ou les preuves de divisibilité.

Récurrence avec deux rangs initiaux : pour les suites $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$, on initialise à $n = 0$ et $n = 1$.

3.3 Notion de limite d'une suite

🧠 Intuition | L'idée de limite, sans formule

Dire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ signifie que les termes de la suite se rapprochent **autant qu'on veut** de ℓ quand n devient grand. Plus précisément :

Peu importe la précision $\varepsilon > 0$ qu'on se fixe (même 0,001, ou 10^{-100}), **à partir d'un certain rang N , tous** les termes u_n sont dans l'intervalle $] \ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon [$.

C'est comme viser une cible : on peut rendre le cercle de la cible aussi petit qu'on veut, et à partir d'un certain moment, **tous les tirs tombent dedans**.

📖 Définition | Limite finie — définition formelle

La suite (u_n) **converge** vers $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon$$

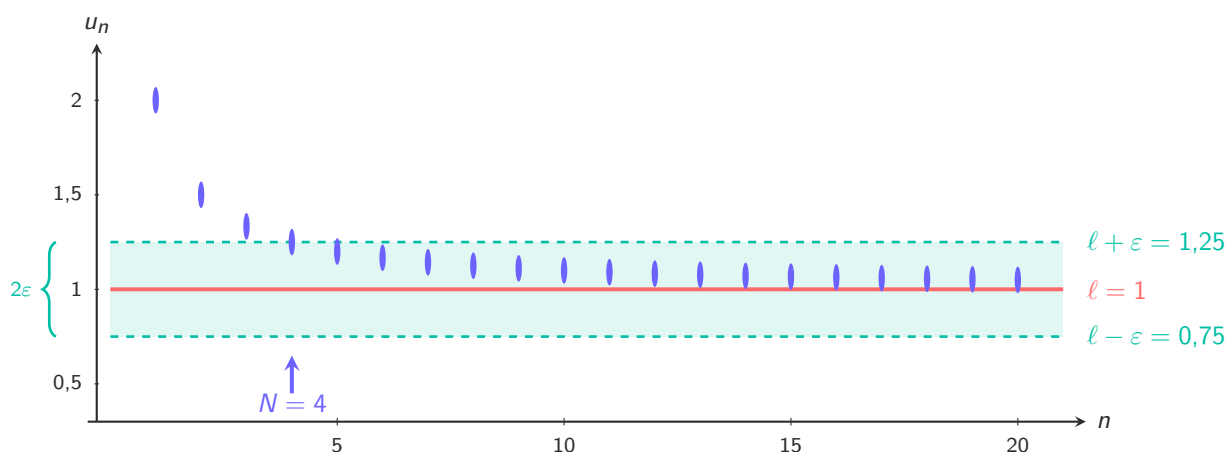
On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

🧠 Intuition | Décrypter la formule symbole par symbole

La formule $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$ se lit :

Symbole	Se lit	Signification concrète
$\forall \varepsilon > 0$	« pour tout $\varepsilon > 0$ »	On se fixe une précision, aussi petite qu'on veut
$\exists N \in \mathbb{N}$	« il existe un rang N »	Il y a un moment à partir duquel ça marche
$\forall n \geq N$	« pour tout $n \geq N$ »	Tous les termes à partir du rang N
$ u_n - \ell < \varepsilon$	« la distance est $< \varepsilon$ »	u_n est dans $] \ell - \varepsilon ; \ell + \varepsilon [$

Important : N dépend de ε . Plus ε est petit (précision élevée), plus N est grand (il faut attendre plus longtemps).



La bande verte = $]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$ avec $\varepsilon = 0,25$. À partir de $N = 4$, **tous** les points sont dans la bande.

💡 Exemple | Vérifier la définition pour $u_n = 1 + \frac{1}{n}$, $\ell = 1$

Question : montrer formellement que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$.

Preuve : soit $\varepsilon > 0$. On cherche N tel que pour tout $n \geq N$: $|u_n - 1| < \varepsilon$.

$$|u_n - 1| = |1 + \frac{1}{n} - 1| = \frac{1}{n}.$$

On veut $\frac{1}{n} < \varepsilon$, soit $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Il suffit de prendre $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$.

Vérification : si $\varepsilon = 0,01$, alors $N = 101$. Pour $n \geq 101$: $|u_n - 1| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{101} < 0,01$. ✓

💡 Exemple | La suite $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers 0

$$|u_n - 0| = \frac{|(-1)^n|}{n} = \frac{1}{n}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, en prenant $N > \frac{1}{\varepsilon}$: pour tout $n \geq N$, $|u_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$.

Même si la suite **oscille** (alterne + et -), elle converge car les oscillations **s'amortissent**.

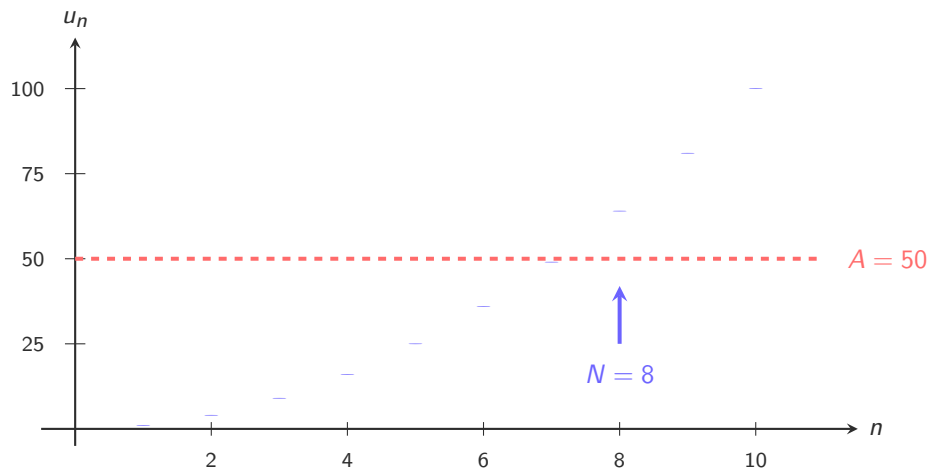
📖 Définition | Limite infinie

Tendre vers $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ signifie :

$$\forall A > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad u_n > A$$

En clair : les termes dépassent **n'importe quelle** borne, aussi grande soit-elle.

Tendre vers $-\infty$: $\forall A > 0, \exists N, \forall n \geq N, u_n < -A$.



Pour $A = 50$: dès $n \geq 8$, on a $u_n = n^2 \geq 64 > 50$.

Définition | Suite divergente

Une suite est **divergente** si elle n'a pas de limite finie. Deux cas :

- Elle tend vers $\pm\infty$ (divergence vers l'infini).
- Elle n'a **aucune** limite (elle « oscille » sans se stabiliser).

Exemple | Suite sans limite : $u_n = (-1)^n$

$u_0 = 1, u_1 = -1, u_2 = 1, u_3 = -1, \dots$ La suite alterne indéfiniment entre -1 et 1 . Elle ne se rapproche d'aucune valeur. Elle n'a **pas de limite** (ni finie, ni infinie).

Preuve : si ℓ était limite, alors pour $\varepsilon = 0,5$ il existerait N tel que $|u_n - \ell| < 0,5$ pour $n \geq N$. Mais $|u_N - u_{N+1}| = |(-1)^N - (-1)^{N+1}| = 2$, et par l'inégalité triangulaire : $2 \leq |u_N - \ell| + |\ell - u_{N+1}| < 0,5 + 0,5 = 1$. Contradiction.

Propriété | Unicité de la limite

Si une suite converge, sa limite est **unique**. On peut donc parler de « la limite ».

Démonstration | Unicité — idée de preuve

Supposons $u_n \rightarrow \ell$ et $u_n \rightarrow \ell'$ avec $\ell \neq \ell'$. Posons $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{3} > 0$.

Il existe $N_1 : |u_n - \ell| < \varepsilon$ pour $n \geq N_1$, et $N_2 : |u_n - \ell'| < \varepsilon$ pour $n \geq N_2$.

Pour $n \geq \max(N_1, N_2)$: $|\ell - \ell'| \leq |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell - \ell'|$. Contradiction.

3.4 Opérations sur les limites

Théorème | Limites et opérations algébriques

Si $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$ (limites finies), alors :

$$\lim(u_n + v_n) = \ell + \ell'$$

$$\lim(\lambda \cdot u_n) = \lambda \ell$$

$$\lim(u_n \cdot v_n) = \ell \cdot \ell'$$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'} \text{ si } \ell' \neq 0$$

Intuition | Pourquoi c'est vrai ?

Si $u_n \approx \ell$ et $v_n \approx \ell'$ pour n grand, alors $u_n + v_n \approx \ell + \ell'$, $u_n \times v_n \approx \ell \times \ell'$, etc. Les opérations sur les approximations se « propagent » aux limites.

La preuve rigoureuse utilise la définition avec ε et l'inégalité triangulaire. Elle est rarement demandée au bac.

Exemple | Application directe

$u_n = \frac{3}{n} + 5$ et $v_n = 1 - \frac{2}{n^2}$. On a $\lim u_n = 5$ et $\lim v_n = 1$. Donc :

$$\lim(u_n \cdot v_n) = 5 \times 1 = 5. \quad \lim(u_n - v_n) = 5 - 1 = 4. \quad \lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{5}{1} = 5.$$

Théorème | Limites avec l'infini

$$\ell + (+\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$\ell \times (+\infty) = +\infty \text{ si } \ell > 0$$

$$\ell \times (+\infty) = -\infty \text{ si } \ell < 0$$

$$\frac{\ell}{+\infty} = 0$$

$$\frac{+\infty}{\ell} = +\infty \text{ si } \ell > 0$$

Attention | Formes indéterminées (FI) — les 4 pièges

Il y a exactement **4 formes indéterminées** :

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \infty - \infty \quad 0 \times \infty \quad \frac{0}{0}$$

Dans ces cas, on ne peut **pas** conclure directement : le résultat dépend de « qui va le plus vite ».

Exemples avec $\frac{\infty}{\infty}$:

- $\frac{n^2}{n} = n \rightarrow +\infty$ (le numérateur gagne)
- $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ (le dénominateur gagne)
- $\frac{3n+1}{n+5} \rightarrow 3$ (match nul : même « vitesse »)

Conclusion : une FI peut donner $+\infty$, 0 , 3 , n'importe quoi. Il faut **transformer** l'expression.

✂ Méthode | Lever une FI du type $\frac{\infty}{\infty}$ (fractions polynomiales)

Méthode : factoriser par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.

Règle : dans $\frac{a_p n^p + \dots}{b_q n^q + \dots}$, la limite est :

- Si $p > q$: $\pm\infty$ (selon le signe de $\frac{a_p}{b_q}$).
- Si $p = q$: $\frac{a_p}{b_q}$ (rapport des coefficients dominants).
- Si $p < q$: 0.

💡 Exemple | FI : factorisation détaillée

$$u_n = \frac{3n^2 + 5n - 1}{2n^2 - n + 7}. \text{ Forme } \frac{\infty}{\infty}.$$

On factorise par n^2 (plus haut degré) au numérateur **et** au dénominateur :

$$u_n = \frac{n^2(3 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2})}{n^2(2 - \frac{1}{n} + \frac{7}{n^2})} = \frac{3 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n} + \frac{7}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{3+0-0}{2-0+0} = \frac{3}{2}.$$

💡 Exemple | FI : $\infty - \infty$

$$u_n = \sqrt{n^2 + n} - n. \text{ Forme } \infty - \infty.$$

Astuce : multiplier et diviser par le conjugué.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(\sqrt{n^2 + n} - n)(\sqrt{n^2 + n} + n)}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \\ &= \frac{n}{n(\sqrt{1 + 1/n} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/n} + 1} \rightarrow \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3.5 Limites de référence et croissances comparées

★ Théorème | Limites de référence à connaître par cœur

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} &= 0 & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} &= 0 & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k &= +\infty \quad (k \geq 1) & \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} &= +\infty \end{aligned}$$

★ Théorème | Limites de q^n — résultat fondamental

Pour $q \in \mathbb{R}$:

q	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$	$q \leq -1$
$\lim q^n$	0	1	$+\infty$	n'existe pas

En particulier : $|q| < 1 \Rightarrow q^n \rightarrow 0$. C'est le résultat **le plus utilisé au bac**.

 *Démonstration* / $|q| < 1 \Rightarrow q^n \rightarrow 0$ — démonstration exigible

Cas $0 < q < 1$: Posons $q = \frac{1}{1+a}$ avec $a > 0$ (car $q < 1$).

Par l'inégalité de Bernoulli : $(1+a)^n \geq 1+na > na$.

Donc $0 < q^n = \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{na} \rightarrow 0$.

Par le théorème des gendarmes : $q^n \rightarrow 0$. □

Cas $-1 < q < 0$: $|q^n| = |q|^n$ et $0 < |q| < 1$, donc $|q|^n \rightarrow 0$, d'où $q^n \rightarrow 0$.

Exemple | Utiliser $q^n \rightarrow 0$

$u_n = 3 + 5 \times 0,8^n$. Comme $|0,8| < 1$: $0,8^n \rightarrow 0$, donc $\lim u_n = 3 + 5 \times 0 = 3$.

$v_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 3} = \frac{1 - 1/2^n}{1 + 3/2^n}$. Comme $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$: $\lim v_n = \frac{1-0}{1+0} = 1$.

★ Théorème | Croissances comparées (au voisinage de $+\infty$)

Pour tous $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $q > 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$$

Intuition | Hiérarchie des vitesses de croissance

$$\underbrace{\ln n}_{\text{très lent}} \ll \underbrace{n^\alpha}_{\text{polynomial}} \ll \underbrace{q^n}_{\text{exponentiel}} \ll \underbrace{n!}_{\text{factoriel}}$$

Le logarithme croît plus lentement que toute puissance. Toute puissance croît plus lentement que toute exponentielle. L'exponentielle croît plus lentement que la factorielle.

En pratique : dans un quotient $\frac{\text{lent}}{\text{rapide}}$, la limite est 0.

Dans un quotient $\frac{\text{rapide}}{\text{lent}}$, la limite est $+\infty$.

Exemple | Appliquer les croissances comparées

a) $u_n = \frac{n^{100}}{1,001^n}$. Forme $\frac{\infty}{\infty}$, mais $q = 1,001 > 1$ bat n^{100} :

$\lim u_n = 0$. L'exponentielle l'emporte toujours, même avec un exposant énorme.

b) $v_n = \frac{(\ln n)^5}{\sqrt{n}}$. C'est $\frac{(\ln n)^\beta}{n^\alpha}$ avec $\beta = 5$ et $\alpha = \frac{1}{2}$:

$\lim v_n = 0$. Le logarithme, même à la puissance 5, perd face à \sqrt{n} .

c) $w_n = n^3 \cdot 0,99^n$. On réécrit : $w_n = \frac{n^3}{(1/0,99)^n} = \frac{n^3}{(1,0101\dots)^n}$. C'est $\frac{n^\alpha}{q^n}$ avec $q > 1$. Donc $\lim w_n = 0$.

3.6 Théorèmes de comparaison

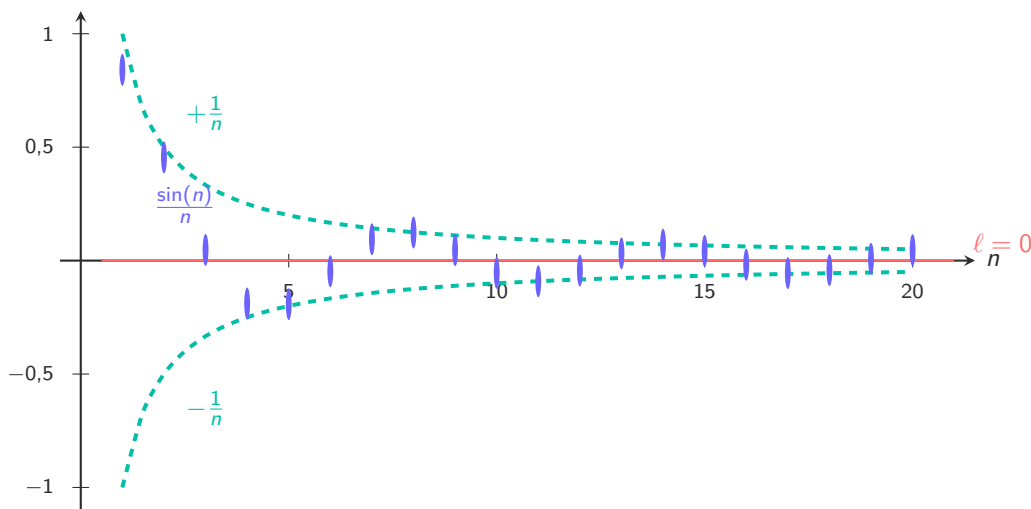
★ Théorème | Théorème des gendarmes (ou d'encadrement)

Si, à partir d'un certain rang n_0 , $a_n \leq u_n \leq b_n$ et si $\lim a_n = \lim b_n = \ell$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

💡 Intuition | Pourquoi « gendarmes » ?

Les suites (a_n) et (b_n) sont deux « gendarmes » qui encadrent u_n . Si les deux gendarmes vont au même endroit ℓ , le prisonnier u_n est forcé d'y aller aussi, car il est coincé entre eux.



$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \text{ et } \pm \frac{1}{n} \rightarrow 0 : \text{ par les gendarmes, } \frac{\sin(n)}{n} \rightarrow 0.$$

✎ Démonstration | Théorème des gendarmes — démonstration exigible

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim a_n = \ell$, il existe N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$: $|a_n - \ell| < \varepsilon$, donc $a_n > \ell - \varepsilon$.

Comme $\lim b_n = \ell$, il existe N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$: $|b_n - \ell| < \varepsilon$, donc $b_n < \ell + \varepsilon$.

L'encadrement $a_n \leq u_n \leq b_n$ est valable à partir du rang n_0 .

Pour $n \geq N = \max(n_0, N_1, N_2)$: $\ell - \varepsilon < a_n \leq u_n \leq b_n < \ell + \varepsilon$.

Donc $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Par définition, $\lim u_n = \ell$. □

💡 Exemple | Gendarmes : $u_n = \frac{\cos(n^2)+3}{n}$

$-1 \leq \cos(n^2) \leq 1$, donc $\frac{-1+3}{n} \leq u_n \leq \frac{1+3}{n}$, i.e. $\frac{2}{n} \leq u_n \leq \frac{4}{n}$.
 $\lim \frac{2}{n} = \lim \frac{4}{n} = 0$. Par les gendarmes : $\lim u_n = 0$.

★ Théorème | Théorème de comparaison (divergence)

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et si $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim u_n = +\infty$.

(De même : si $u_n \leq v_n$ et $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.)

💡 Exemple | Comparaison pour la divergence

$u_n = n + \sin(n)$. On a $u_n \geq n - 1$ (car $\sin(n) \geq -1$), et $\lim(n - 1) = +\infty$.
Par comparaison : $\lim u_n = +\infty$.

3.7 Théorème de convergence monotone

★ Théorème | Théorème de la limite monotone (admis)

- Toute suite **croissante et majorée** converge.
- Toute suite **décroissante et minorée** converge.

🧠 Intuition | Pourquoi c'est vrai (idée géométrique)

Imagine une suite croissante qui ne dépasse jamais un mur M (la borne supérieure). Elle monte, monte... mais elle est bloquée. Elle est forcée de se « tasser » contre un plafond. Ce plafond est la limite.



⚠ Attention | Ce théorème ne donne pas la valeur de la limite !

Il garantit seulement l'**existence**. Pour trouver sa valeur, on utilise une autre méthode, typiquement le passage à la limite dans la relation de récurrence : si $u_{n+1} = f(u_n)$ et f continue, alors $\ell = f(\ell)$.

🔧 Méthode | Démarche complète pour étudier $u_{n+1} = f(u_n)$ — les 5 étapes

C'est la méthode la plus demandée au bac pour les suites récurrentes :

1. **Conjecturer.** Calculer u_0, u_1, u_2, u_3 au brouillon. Deviner le comportement.
2. **Borner par récurrence.** Montrer $a \leq u_n \leq b$ pour tout n (souvent : montrer $u_n \leq \ell$ ou $u_n \geq \ell$ où ℓ est le point fixe).
3. **Monotonie par récurrence.** Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$.
4. **Convergence.** Conclure : croissante + majorée \Rightarrow converge (ou décroissante + minorée).
5. **Limite.** Passer à la limite : $\ell = f(\ell)$. Résoudre cette équation.

💡 Exemple | Étude complète rédigée : $u_0 = 1, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

Étape 1 — Conjecture : $u_0 = 1, u_1 = \sqrt{3} \approx 1,73, u_2 = \sqrt{3,73} \approx 1,93, u_3 \approx 1,98$. Semble croissante, convergeant vers 2.

Étape 2 — Encadrement : montrons $0 \leq u_n \leq 2$ par récurrence.

$P(n) : 0 \leq u_n \leq 2$.

Init : $0 \leq u_0 = 1 \leq 2$. ✓

Hér. : si $0 \leq u_n \leq 2$, alors $2 \leq u_n + 2 \leq 4$, donc $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq \sqrt{4} = 2$. Comme $\sqrt{2} > 0$: $0 \leq u_{n+1} \leq 2$. ✓

Étape 3 — Monotonie : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n$.

Posons $g(x) = \sqrt{x + 2} - x$. On a $g(x) = 0 \iff \sqrt{x + 2} = x \iff x^2 - x - 2 = 0 \iff x = 2$ (pour $x \geq 0$).

Pour $0 \leq x < 2$: $g(x) > 0$ (vérifier : $g(0) = \sqrt{2} > 0$ et g ne s'annule qu'en 2).

Comme $0 \leq u_n < 2$: $u_{n+1} - u_n = g(u_n) > 0$. **Suite croissante.**

Autre méthode : utiliser que $f(x) = \sqrt{x + 2}$ est croissante. Si $u_n \leq u_{n+1}$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2}$. Par récurrence (init : $u_0 = 1 \leq \sqrt{3} = u_1$).

Étape 4 — Convergence : (u_n) est croissante et majorée par 2. Par le théorème de convergence monotone, elle **converge**.

Étape 5 — Limite : soit $\ell = \lim u_n$. La fonction $f(x) = \sqrt{x + 2}$ est continue.

Par passage à la limite : $\ell = \sqrt{\ell + 2}$, donc $\ell^2 = \ell + 2$, soit $\ell^2 - \ell - 2 = 0$.

$\Delta = 1 + 8 = 9, \ell = \frac{1 \pm 3}{2}$, soit $\ell = 2$ ou $\ell = -1$.

Comme $u_n \geq 0$ pour tout n : $\ell \geq 0$, donc $\boxed{\ell = 2}$.

3.8 Suites adjacentes (complément)

📖 Définition | Suites adjacentes

Deux suites (a_n) et (b_n) sont **adjacentes** si :

1. (a_n) est croissante.
2. (b_n) est décroissante.
3. $\lim(b_n - a_n) = 0$.

★ Théorème | Théorème des suites adjacentes

Si (a_n) et (b_n) sont adjacentes, alors elles convergent vers la **même limite** ℓ , et pour tout n : $a_n \leq \ell \leq b_n$.

🖋 Démonstration | Idée de la preuve

(a_n) croissante et majorée par b_0 (car $a_n \leq b_n \leq b_0$) : elle converge vers ℓ_a .

(b_n) décroissante et minorée par a_0 : elle converge vers ℓ_b .

Or $\lim(b_n - a_n) = 0$ implique $\ell_b - \ell_a = 0$, donc $\ell_a = \ell_b = \ell$. □

💡 Exemple | Suites adjacentes : encadrement de e

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (croissante) et $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ (décroissante) sont adjacentes. Elles convergent toutes deux vers $e \approx 2,71828\dots$, et $a_n \leq e \leq b_n$ pour tout n .

3.9 Suites et fonctions continues

★ Théorème | Passage à la limite dans une relation de récurrence

Si $u_{n+1} = f(u_n)$ et si :

- (u_n) converge vers ℓ ,
- f est **continue** en ℓ ,

alors $\ell = f(\ell)$ (la limite est un **point fixe** de f).

✍ Démonstration | Exigible

Comme $u_n \rightarrow \ell$ et f continue en ℓ : $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$.

Or $f(u_n) = u_{n+1} \rightarrow \ell$ (car (u_{n+1}) est une sous-suite de (u_n) qui converge vers ℓ).

Par unicité de la limite : $f(\ell) = \ell$. □

⚠ Attention | Piège classique : la réciproque est fausse !

$\ell = f(\ell)$ ne signifie **pas** que la suite converge vers ℓ . Contre-exemple :

$f(x) = -x + 4$ a pour point fixe $\ell = 2$ (car $f(2) = 2$). Mais avec $u_0 = 0$:

$u_0 = 0, u_1 = 4, u_2 = 0, u_3 = 4, \dots$. La suite **oscille** et ne converge pas !

Morale : il faut **toujours prouver la convergence d'abord** (par monotonie + borne), et **ensuite seulement** utiliser $\ell = f(\ell)$ pour trouver la valeur.

✔ Propriété | Interprétation graphique : escalier et colimaçon

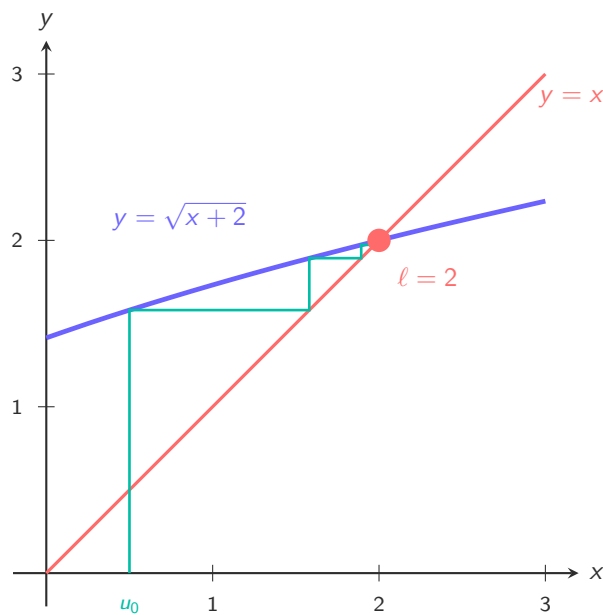
Pour représenter les termes de $u_{n+1} = f(u_n)$, on trace $y = f(x)$ et $y = x$.

Escalier : si f est croissante près de ℓ et $|f'(\ell)| < 1$. Les points montent (ou descendent) en « marches d'escalier » vers l'intersection $y = f(x)$ et $y = x$.

Colimaçon (spirale) : si f est décroissante près de ℓ et $|f'(\ell)| < 1$. Les points tournent en spirale autour de ℓ .

Dans les deux cas : l'intersection de $y = f(x)$ et $y = x$ donne les points fixes (les limites possibles).

Représentation en escalier : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$, $u_0 = 0,5$



3.10 Algorithme : calcul de termes et recherche de seuil

Calculer les termes d'une suite récurrente

```

1 import math
2
3 def termes(u0, f, n):
4     """Retourne [u_0, u_1, ..., u_n]."""
5     U = [u0]
6     u = u0
7     for k in range(n):
8         u = f(u)
9         U.append(u)
10    return U
11
12 # Exemple : u_{n+1} = sqrt(u_n + 2), u_0 = 1
13 U = termes(1, lambda u: math.sqrt(u + 2), 20)
14 print(f"u_20 = {U[-1]:.10f}") # 2.0000000000

```

Recherche de seuil : trouver n tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$

```

1 def seuil_convergence(u0, f, ell, eps):
2     """Plus petit n tel que |u_n - ell| < eps."""
3     u, n = u0, 0
4     while abs(u - ell) >= eps:
5         u = f(u)
6         n += 1
7     return n
8
9 # u_{n+1} = sqrt(u_n + 2), u_0 = 1, ell = 2
10 n = seuil_convergence(1, lambda u: math.sqrt(u+2), 2, 1e-6)
11 print(n) # 21

```

4 Boîte à outils

Méthode | Les 10 réflexes suites & récurrence

1. **Récurrence = 4 étapes.** Poser $P(n)$, initialisation, hérédité, conclusion. Pas une de moins.
2. **Pour l'hérédité :** partir du côté $P(n+1)$ et y faire apparaître $P(n)$, ou partir de $P(n)$ et en déduire $P(n+1)$.
3. **Suite $u_{n+1} = f(u_n)$:** chercher le point fixe $\ell = f(\ell)$, puis montrer monotonie + borne, puis conclure.
4. **Monotonie :** étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$, ou comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 (si $u_n > 0$).
5. $|q| < 1 \Rightarrow q^n \rightarrow 0$. C'est LE résultat à utiliser pour la convergence géométrique.
6. **Forme indéterminée :** factoriser par le terme dominant, ou utiliser les croissances comparées.
7. **Gendarmes :** encadrer u_n entre deux suites de même limite.
8. **Convergence monotone :** croissante + majorée \Rightarrow converge. Décroissante + minorée \Rightarrow converge.
9. **Arithmético-géométrique $u_{n+1} = au_n + b$:** poser $v_n = u_n - \ell$ avec $\ell = \frac{b}{1-a}$.
10. **Vérifier au brouillon** en calculant u_0, u_1, u_2, u_3 avant de rédiger.

Attention | Top 6 des erreurs sur les suites

1. **Oublier l'initialisation** dans la récurrence. Sans elle, la preuve est **invalid**.
2. **Confondre $P(n)$ vraie pour un n fixé et $P(n)$ vraie pour tout n .** L'hypothèse de récurrence est pour **un** n donné.
3. **Dire « la suite est croissante donc diverge ».** Non ! Elle peut converger (si majorée).
4. **Conclure directement avec le point fixe.** Il faut d'abord prouver la convergence.
5. **Oublier une forme indéterminée.** $\frac{\infty}{\infty}$ n'est pas 1, et $\infty - \infty$ n'est pas 0.
6. **Confondre suite et fonction.** u_n est définie pour $n \in \mathbb{N}$, pas pour $x \in \mathbb{R}$.

🔧 Méthode | Mots-clés à repérer dans les énoncés 🔑

Tu lis dans l'énoncé. . .	Tu penses à . . .
« montrer que pour tout n »	récurrence
« étudier la convergence »	monotonie + borne, ou gendarmes
« déterminer la limite »	opérations, factorisation, croissances comparées
« montrer que (u_n) est croissante »	signe de $u_{n+1} - u_n$ (souvent par récurrence)
« en déduire que (u_n) converge »	théorème de convergence monotone
« on pose $v_n = u_n - \ell$ »	suite auxiliaire géométrique
« encadrer »	viser les gendarmes
« montrer que $u_n \leq M$ »	récurrence
« expliciter u_n »	trouver le terme général (arithm., géom., ou auxiliaire)

✅ Propriété | Récapitulatif des formules essentielles

Résultat	Formule
Somme arithmétique	$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
Somme géométrique	$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (q \neq 1)$
Suite arithm.-géom.	$u_n = \ell + (u_0 - \ell)a^n$ avec $\ell = \frac{b}{1-a}$
Limite de q^n	$ q < 1 \Rightarrow 0, q = 1 \Rightarrow 1, q > 1 \Rightarrow +\infty$
Croissances comparées	$\ln n \ll n^\alpha \ll q^n \ll n!$
Gendarmes	$a_n \leq u_n \leq b_n, \lim a_n = \lim b_n = \ell \Rightarrow \lim u_n = \ell$
Convergence monotone	croissante + majorée \Rightarrow converge
Point fixe	si $u_n \rightarrow \ell$ et f continue, alors $\ell = f(\ell)$

5 Exercices

Exercice 1 — Récurrence directe

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 2 — Récurrence : inégalité

Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$: $2^n \geq n + 1$.

Exercice 3 — Suite arithmético-géométrique

Soit $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

- Déterminer le point fixe ℓ .
- Poser $v_n = u_n - \ell$. Montrer que (v_n) est géométrique et en déduire u_n .
- Déterminer $\lim u_n$.

Exercice 4 — Limites directes

Calculer les limites suivantes :

- $u_n = \frac{3n^2 - n + 1}{5n^2 + 2}$
- $v_n = \frac{n^3 - 1}{n^2 + n}$
- $w_n = \frac{(-1)^n}{n}$
- $t_n = \frac{2^n}{n^{10}}$

Exercice 5 — Récurrence : divisibilité

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 6 — Étude complète d'une suite récurrente

Soit $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

- Conjecturer le comportement de la suite (calculer u_1, u_2, u_3, u_4).
- Montrer par récurrence que $u_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que (u_n) est décroissante.
- En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 7 — Théorème des gendarmes

Soit $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2 + 1}$.

- Encadrer u_n entre deux suites simples.
- En déduire $\lim u_n$.

Exercice 8 — Suite auxiliaire

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

- Calculer u_1, u_2, u_3 .
- Poser $v_n = u_n - 2$. Montrer que (v_n) est géométrique.
- Exprimer u_n en fonction de n .
- Étudier la limite de (u_n) .

Exercice 9 ★★☆☆ — **Récurrence double**

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 10 ★★☆☆ — **Suite et fonction**

Soit $f(x) = \sqrt{2x+3}$ et la suite $u_0 = 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 3$ pour tout n .
- Montrer que (u_n) est croissante.
- En déduire que (u_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 11 ★★☆☆ — **Recherche de seuil**

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

- Montrer que (u_n) est strictement croissante.
- Montrer que $u_n \geq \sqrt{2n+1}$ pour tout $n \geq 0$ (par récurrence).
- En déduire que $\lim u_n = +\infty$.
- Écrire un programme Python qui détermine le plus petit n tel que $u_n > 100$.

Exercice 12 ★★☆☆ — **Suites et géométrie**

Un triangle équilatéral de côté 1 a ses milieux reliés pour former un triangle intérieur. On répète le procédé.

- Montrer que les côtés c_n des triangles successifs vérifient $c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n$.
- Exprimer le périmètre P_n et l'aire A_n du n -ième triangle.
- Calculer $\sum_{k=0}^n P_k$ et $\sum_{k=0}^n A_k$. Étudier leurs limites.

Exercice 13 ★★★ — **Inégalité arithmético-géométrique**

Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ et tous réels $a_1, \dots, a_n > 0$ tels que $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n = 1$:
 $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$.

Indication : utiliser la récurrence forte. Pour l'hérédité, supposer (quitte à réordonner) que $a_1 \leq 1 \leq a_2$, poser $b = a_1 \cdot a_2$ et appliquer l'hypothèse de récurrence à b, a_3, \dots, a_n .

Exercice 14 ★★★ — **Convergence et rapidité**

Soit $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$ (méthode de Héron pour $\sqrt{2}$).

- Montrer que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \geq 1$.
- Montrer que (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
- En déduire la convergence et calculer la limite.
- Poser $e_n = u_n - \sqrt{2}$. Montrer que $e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2\sqrt{2}}$. Interpréter.

6 Problème — La suite de Babylone et les approximations de \sqrt{a}

★ ★ ★

Problème style prépa

La méthode de Héron (ou babylonienne) permet de calculer \sqrt{a} à l'aide d'une suite récurrente. Ce problème en fait l'étude complète : existence, convergence, vitesse.

Soit $a > 0$ fixé et la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ quelconque et :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$$

Partie A — Premières propriétés

1. Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$: $u_n \geq \sqrt{a}$.

Indication : développer $(u_n - \sqrt{a})^2 \geq 0$ et en déduire $u_n + \frac{a}{u_n} \geq 2\sqrt{a}$.

3. En déduire que (u_n) est décroissante à partir du rang 1.
4. Conclure que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Partie B — Vitesse de convergence

5. On pose $e_n = u_n - \sqrt{a}$ (erreur à l'étape n). Montrer que :

$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2u_n}$$

6. En déduire que $e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2\sqrt{a}}$ pour $n \geq 1$.
7. Poser $K = \frac{1}{2\sqrt{a}}$. Montrer par récurrence que $e_n \leq \frac{1}{K} (Ke_1)^{2^{n-1}}$ pour $n \geq 1$.
8. Que signifie ce résultat en termes de décimales correctes ?

Partie C — Application numérique et algorithmique

9. Calculer u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 pour $a = 2$ et $u_0 = 1$. Compter les décimales correctes de $\sqrt{2}$.
10. Écrire un programme Python qui calcule \sqrt{a} par cette méthode avec une précision $\varepsilon > 0$.
11. Comparer la vitesse de convergence avec la dichotomie pour le calcul de $\sqrt{2}$ à 10^{-15} près.

7 Corrigés détaillés

Exercice 1

$$P(n) : \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Initialisation ($n = 0$) : $\sum_{k=0}^0 k = 0$ et $\frac{0 \times 1}{2} = 0$. $P(0)$ vraie.

Hérédité : Supposons $P(n) : \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \underbrace{\sum_{k=0}^n k}_{= \frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

C'est $P(n+1)$. **Conclusion** : $P(n)$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

$$P(n) : 2^n \geq n+1 \text{ pour } n \geq 1.$$

Init ($n = 1$) : $2^1 = 2 \geq 2 = 1+1$. $P(1)$ vraie.

Hér. : Supposons $2^n \geq n+1$. Alors $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2(n+1) = 2n+2$.

Or $2n+2 \geq n+2$ car $n \geq 1 \Rightarrow n \geq 0$. Donc $2^{n+1} \geq (n+1)+1$. $P(n+1)$ vraie.

Exercice 3

a) Point fixe : $\ell = \frac{1}{2}\ell + 3 \Rightarrow \frac{1}{2}\ell = 3 \Rightarrow \ell = 6$.

b) $v_n = u_n - 6$. $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 = \frac{1}{2}(u_n - 6) = \frac{1}{2}v_n$.

(v_n) géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et premier terme $v_0 = u_0 - 6 = 5 - 6 = -1$.

$$v_n = -1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ donc } u_n = 6 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$, donc $\lim u_n = 6$.

Exercice 4

a) $u_n = \frac{n^2(3-1/n+1/n^2)}{n^2(5+2/n^2)} \rightarrow \frac{3}{5}$.

b) $v_n = \frac{n^3(1-1/n^3)}{n^2(1+1/n)} = \frac{n(1-1/n^3)}{1+1/n} \rightarrow +\infty$.

c) $|w_n| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Comme $-\frac{1}{n} \leq w_n \leq \frac{1}{n}$, par les gendarmes : $\lim w_n = 0$.

d) Croissances comparées : $q = 2 > 1$ et $\alpha = 10$. $\frac{n^{10}}{2^n} \rightarrow 0$, donc $\frac{2^n}{n^{10}} = \frac{1}{n^{10}/2^n} \rightarrow +\infty$.

Exercice 5

$$P(n) : 7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}.$$

Init ($n = 0$) : $3^1 + 2^2 = 3 + 4 = 7 = 7 \times 1$. $P(0)$ vraie.

Hér. : Supposons $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

$$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 3^{2n+3} + 2^{n+3} = 9 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2}.$$

$$= 9 \cdot 3^{2n+1} + 2 \cdot 2^{n+2} = 2(3^{2n+1} + 2^{n+2}) + 7 \cdot 3^{2n+1}.$$

Le premier terme est divisible par 7 (hypothèse $\times 2$), le second aussi ($7 \times \dots$). Donc la somme est divisible par 7. $P(n+1)$ vraie.

Exercice 6

a) $u_0 = 4$, $u_1 = \frac{4}{2} + 1 = 3$, $u_2 = \frac{3}{2} + 1 = 2,5$, $u_3 = 2,25$, $u_4 = 2,125$. Semble décroître vers 2.

b) $P(n) : u_n \geq 2$.

Init : $u_0 = 4 \geq 2$. Hér. : si $u_n \geq 2$, alors $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 1 \geq \frac{2}{2} + 1 = 2$. $P(n+1)$ vraie.

c) $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{2} + 1 - u_n = 1 - \frac{u_n}{2}$. Or $u_n \geq 2$ donc $\frac{u_n}{2} \geq 1$, d'où $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Suite décroissante.

d) (u_n) décroissante et minorée par 2 : elle converge. Limite $\ell : \ell = \frac{\ell}{2} + 1 \Rightarrow \frac{\ell}{2} = 1 \Rightarrow \ell = 2$.

Exercice 7

a) $-1 \leq (-1)^n \leq 1$, donc $\frac{n-1}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^2+1}$.

b) $\frac{n-1}{n^2+1} = \frac{n(1-1/n)}{n^2(1+1/n^2)} = \frac{1-1/n}{n(1+1/n^2)} \rightarrow 0$.

De même $\frac{n+1}{n^2+1} \rightarrow 0$. Par les gendarmes : $\lim u_n = 0$.

Exercice 8

a) $u_0 = 1$, $u_1 = 3 \times 1 - 4 = -1$, $u_2 = 3 \times (-1) - 4 = -7$, $u_3 = 3 \times (-7) - 4 = -25$.

b) $v_n = u_n - 2$. $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 3u_n - 4 - 2 = 3u_n - 6 = 3(u_n - 2) = 3v_n$.

(v_n) géométrique de raison 3, $v_0 = u_0 - 2 = -1$.

c) $v_n = -3^n$, donc $u_n = 2 - 3^n$.

d) $3^n \rightarrow +\infty$, donc $u_n = 2 - 3^n \rightarrow -\infty$.

Exercice 9

$P(n) : \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour $n \geq 1$.

Init ($n = 1$) : $1^2 = 1$ et $\frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$. $P(1)$ vraie.

Hér. : Supposons $P(n)$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

C'est $P(n+1)$ car $(n+1)(n+2)(2(n+1)+1) = (n+1)(n+2)(2n+3)$.

Exercice 10

a) $P(n) : 0 \leq u_n \leq 3$.

Init : $u_0 = 0 \in [0, 3]$. Hér. : si $0 \leq u_n \leq 3$, alors $3 \leq 2u_n + 3 \leq 9$, donc $\sqrt{3} \leq u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \leq 3$. En particulier $0 \leq u_{n+1} \leq 3$.

b) $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n + 3} - u_n$. Posons $g(x) = \sqrt{2x + 3} - x$.

$g(x) = 0 \iff \sqrt{2x + 3} = x \iff 2x + 3 = x^2$ (pour $x \geq 0$) $\iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x = 3$ (car $x \geq 0$).

Pour $0 \leq x < 3 : g(x) > 0$ (on vérifie $g(0) = \sqrt{3} > 0$, et g est continue, ne s'annule qu'en 3).

Comme $u_n \in [0, 3]$ et $u_n < 3$ (car $u_0 = 0$ et la suite n'atteint pas 3, vérifiable par récurrence), on a $u_{n+1} - u_n = g(u_n) > 0$. Suite croissante.

c) Croissante et majorée par 3 : converge. Limite $\ell = \sqrt{2\ell+3}$, $\ell^2 = 2\ell + 3$, $\ell^2 - 2\ell - 3 = 0$, $\ell = 3$ (car $\ell \geq 0$).

Exercice 11

a) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$ car $u_n > 0$ (par récurrence immédiate depuis $u_0 = 1 > 0$). Suite strictement croissante.

b) $P(n) : u_n \geq \sqrt{2n+1}$.

Init ($n = 0$) : $u_0 = 1 \geq \sqrt{1} = 1$. $P(0)$ vraie.

Hér. : supposons $u_n \geq \sqrt{2n+1}$.

$$u_{n+1}^2 = (u_n + \frac{1}{u_n})^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2} \geq u_n^2 + 2 \geq (2n+1) + 2 = 2(n+1) + 1.$$

Comme $u_{n+1} > 0 : u_{n+1} \geq \sqrt{2(n+1)+1}$. $P(n+1)$ vraie.

c) $u_n \geq \sqrt{2n+1} \rightarrow +\infty$. Par comparaison : $\lim u_n = +\infty$.

d)

```

1 u = 1
2 n = 0
3 while u <= 100:
4     u = u + 1/u
5     n += 1
6 print(n)      # 4999

```

Exercice 12

a) Le triangle formé par les milieux a des côtés de longueur $\frac{c_n}{2}$ (propriété des milieux). Donc $c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n$.

b) $c_n = (\frac{1}{2})^n$. $P_n = 3c_n = 3 \cdot 2^{-n}$. $A_n = \frac{\sqrt{3}}{4}c_n^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4^{-n}$.

c) $\sum_{k=0}^n P_k = 3 \sum_{k=0}^n 2^{-k} = 3 \cdot \frac{1-2^{-(n+1)}}{1-1/2} = 6(1 - 2^{-(n+1)}) \rightarrow 6$.

$$\sum_{k=0}^n A_k = \frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{k=0}^n 4^{-k} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1-4^{-(n+1)}}{3/4} = \frac{\sqrt{3}}{3}(1 - 4^{-(n+1)}) \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Exercice 13

$P(n)$: pour $a_1 \cdots a_n = 1$, on a $a_1 + \cdots + a_n \geq n$.

Init ($n = 1$) : $a_1 = 1$ et $a_1 \geq 1$. Trivial.

Hér. (récurrence forte) : supposons $P(k)$ vraie pour tout $k \leq n$. Soient $a_1, \dots, a_{n+1} > 0$ avec produit 1.

Si tous les $a_i = 1$: $\sum a_i = n+1 \geq n+1$. Sinon, il existe $a_i < 1$ et $a_j > 1$. Quitte à réordonner, $a_1 \leq 1 \leq a_2$.

Posons $b = a_1 a_2$. Les n nombres b, a_3, \dots, a_{n+1} ont pour produit 1. Par $P(n)$: $b + a_3 + \cdots + a_{n+1} \geq n$.

Il reste à montrer que $a_1 + a_2 \geq 1 + b = 1 + a_1 a_2$.

$$a_1 + a_2 - 1 - a_1 a_2 = (1 - a_1)(a_2 - 1) \geq 0 \text{ car } a_1 \leq 1 \text{ et } a_2 \geq 1.$$

Donc $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1} \geq 1 + b + a_3 + \cdots + a_{n+1} \geq 1 + n = n + 1$.

Exercice 14

a) $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$. Par AM-GM : $\frac{u_n + \frac{2}{u_n}}{2} \geq \sqrt{u_n \cdot \frac{2}{u_n}} = \sqrt{2}$. Donc $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$ pour $n \geq 0$, et donc pour tout $n \geq 1$.

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(\frac{2}{u_n} - u_n) = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}$. Pour $n \geq 1$: $u_n \geq \sqrt{2}$ donc $u_n^2 \geq 2$, d'où $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

c) Décroissante (pour $n \geq 1$) et minorée par $\sqrt{2}$: converge.

$$\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{2}{\ell}) \Rightarrow 2\ell = \ell + \frac{2}{\ell} \Rightarrow \ell = \frac{2}{\ell} \Rightarrow \ell^2 = 2. \text{ Comme } \ell > 0 : \ell = \sqrt{2}.$$

$$d) e_{n+1} = u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n}) - \sqrt{2} = \frac{u_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}u_n}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} = \frac{e_n^2}{2u_n}.$$

$$\text{Comme } u_n \geq \sqrt{2} : e_{n+1} \leq \frac{e_n^2}{2\sqrt{2}}.$$

Interprétation : convergence **quadratique**. Si $e_n \approx 10^{-k}$, alors $e_{n+1} \approx \frac{10^{-2k}}{2\sqrt{2}} \approx 10^{-2k}$. Le nombre de décimales correctes **double** à chaque itération.

Corrigé du problème — La suite de Babylone**Partie A — Premières propriétés**

1. Par récurrence. $u_0 > 0$. Si $u_n > 0$: $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$. Chaque terme est somme de termes positifs (car $a > 0$), donc $u_{n+1} > 0$.

$$2. (u_n - \sqrt{a})^2 \geq 0 \Rightarrow u_n^2 - 2\sqrt{a}u_n + a \geq 0 \Rightarrow u_n^2 + a \geq 2\sqrt{a}u_n.$$

Division par $u_n > 0$: $u_n + \frac{a}{u_n} \geq 2\sqrt{a}$, d'où $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) \geq \sqrt{a}$ pour tout $n \geq 0$, et donc $u_n \geq \sqrt{a}$ pour $n \geq 1$.

$$3. \text{ Pour } n \geq 1 : u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(\frac{a}{u_n} - u_n) = \frac{a - u_n^2}{2u_n}.$$

Or $u_n \geq \sqrt{a} \Rightarrow u_n^2 \geq a \Rightarrow a - u_n^2 \leq 0$. Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Suite décroissante à partir du rang 1.

4. $(u_n)_{n \geq 1}$ décroissante et minorée par \sqrt{a} : elle converge vers $\ell \geq \sqrt{a}$.

$$\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{a}{\ell}) \Rightarrow 2\ell = \ell + \frac{a}{\ell} \Rightarrow \ell = \frac{a}{\ell} \Rightarrow \ell^2 = a. \text{ Comme } \ell > 0 : \boxed{\ell = \sqrt{a}}.$$

Partie B — Vitesse de convergence

$$5. e_{n+1} = u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{u_n^2 + a}{2u_n} - \sqrt{a} = \frac{u_n^2 + a - 2\sqrt{a}u_n}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n} = \frac{e_n^2}{2u_n}.$$

$$6. \text{ Pour } n \geq 1 : u_n \geq \sqrt{a}, \text{ donc } \frac{1}{2u_n} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} = K. \text{ D'où } e_{n+1} \leq K \cdot e_n^2.$$

$$7. P(n) : e_n \leq \frac{1}{K}(Ke_1)^{2^{n-1}} \text{ pour } n \geq 1.$$

$$\text{Init } (n=1) : \frac{1}{K}(Ke_1)^{2^0} = \frac{1}{K} \cdot Ke_1 = e_1. \text{ Vrai.}$$

$$\text{Hér. : } e_{n+1} \leq Ke_n^2 \leq K(\frac{1}{K}(Ke_1)^{2^{n-1}})^2 = K \cdot \frac{1}{K^2}(Ke_1)^{2^n} = \frac{1}{K}(Ke_1)^{2^n}. P(n+1) \text{ vraie.}$$

8. Si $Ke_1 < 1$ (ce qui est le cas dès que u_1 est assez proche de \sqrt{a}), alors $(Ke_1)^{2^{n-1}} \rightarrow 0$ **extrêmement vite**. L'exposant 2^{n-1} double à chaque étape, donc le nombre de décimales correctes **double** aussi : c'est la **convergence quadratique**.

Partie C — Application numérique

$$9. a = 2, u_0 = 1.$$

$$u_1 = \frac{1}{2}(1 + 2) = 1,5. (\sqrt{2} \approx 1,4142 \dots, 0 \text{ décimale.})$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(1,5 + \frac{2}{1,5}) = \frac{1}{2} \times \frac{17}{6} \approx 1,41\overline{667}. \text{ (2 décimales.)}$$

$$u_3 \approx 1,41421\overline{569}. \text{ (5 décimales.)}$$

$$u_4 \approx 1,41421356237\overline{469}. \text{ (11 décimales.)}$$

On voit la convergence quadratique : $0 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 11$ décimales. Le doublement est spectaculaire.

10.

```

1 def heron(a, eps):
2     u = a      # u_0 = a (ou n'importe quel u_0 > 0)
3     while abs(u**2 - a) > eps:
4         u = 0.5 * (u + a / u)
5     return u
6
7 print(heron(2, 1e-15))    # 1.4142135623730951

```

11. Pour $\sqrt{2}$ à 10^{-15} près :

Héron : environ 5 itérations (convergence quadratique : $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 11 \rightarrow 22$ décimales).

Dichotomie : $n \geq \frac{\ln(1/10^{-15})}{\ln 2} \approx 50$ itérations.

Héron est environ **10 fois plus rapide**. C'est la puissance de la convergence quadratique.

Fin de la fiche — Suites : Récurrence & Limites

Tu maîtrises maintenant :

- Le raisonnement par récurrence en 4 étapes (initialisation, hérédité, conclusion).
 - Les suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques.
- Les limites : opérations, formes indéterminées, croissances comparées.
- Les théorèmes : gendarmes, comparaison, convergence monotone.
 - L'étude complète d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$: borne, monotonie, convergence, limite.

Comme les dominos : un premier pas, puis la propagation à l'infini.

→ Prochaine étape : Limites de fonctions.

« Les dominos ne tombent que si le premier est poussé. »